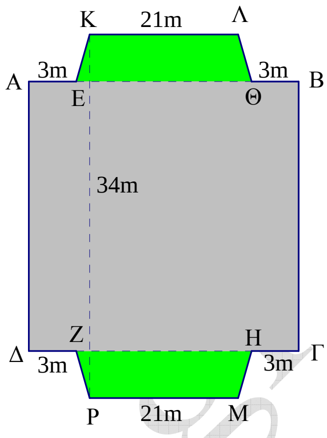
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 3η ΔΕΚΑΔΑ

21.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ παριστάνει μία τετράγωνη πλατεία και τα τετράπλευρα ΕΚΛΘ και ΗΜΡΖ παριστάνουν δύο κήπους.
Η πλευρά του ΑΒΓΔ είναι 30m και η απόσταση των ΚΛ και ΡΜ είναι 34 m. Ακόμα είναι ΚΛ // ΑΒ και ΡΜ// ΔΓ.
Την πλατεία θα την πλακοστρώσουμε με πλακάκια σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 20cm και 15cm και κόστους 3€ το καθένα, ενώ στους κήπους θα φυτέψουμε γκαζόν κόστους 8 € το τετραγωνικό μέτρο.
Να υπολογίσετε πόσο θα μας στοιχίσουν οι παραπάνω εργασίες .



Προτεινόμενη λύση

Το εμβαδόν της πλατείας είναι $E_{\pi\lambda} = 30^2 = 900m^2 = 9000000cm^2$
Το κάθε πλακάκι έχει εμβαδόν $E = 20\cdot15 = 300cm^2$
Τα πλακάκια που θα χρειαστούμε είναι 9000000:300 = 30000
και το κόστος τους είναι 30000·3 = 90000 €
Η κάθε πράσινη περιοχή είναι τραπέζιο με μικρή βάση ΚΛ = ΡΜ =21m και μεγάλη βάση $Ε\Theta = ΖΗ = 30-3-3 = 24$ m και ύψος $\frac{ΚΡ-ΕΖ}{2} = \frac{34-30}{2} = 2$m οπότε το εμβαδόν του κάθε κήπου είναι $E_{\kappa} = \frac{(21+24)\cdot 2}{2} = 45m^2$.
Το συνολικό εμβαδόν των δύο κήπων είναι $2\cdot45 = 90\ m^2$ και το κόστος φυτέματος του γκαζόν είναι 90 · 8 = 720 €
Επομένως το κόστος των εργασιών είναι 90000 + 720 = 90720 €

22.

α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο να δικαιολογήσετε γιατί για το ημίτονο μιας οξείας γωνίας του $\hat{\omega}$ ισχύει $0 < ημω < 1$

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $ημω = \frac{1-x}{2} + \frac{2x+4}{3}$, όπου ω κάποια οξεία γωνία.

Προτεινόμενη λύση

α)

Γνωρίζουμε ότι $ημω = \frac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$
Επειδή οι όροι του κλάσματος είναι θετικοί αριθμοί και η κάθετη πλευρά είναι < από την υποτείνουσα, το κλάσμα είναι θετικός αριθμός και μικρότερο από το 1,
Άρα $0 < ημω < 1$

β)

Σύμφωνα με το (α) πρέπει $0 < \frac{1-x}{2} + \frac{2x+4}{3} < 1$

Λύνουμε κάθε μία από τις ανισώσεις

$0 < \frac{1-x}{2} + \frac{2x+4}{3}$ και $\frac{1-x}{2} + \frac{2x+4}{3} < 1$ και τις συναληθεύουμε

$0 < \frac{1-x}{2} + \frac{2x+4}{3}$ $\qquad$ $\frac{1-x}{2} + \frac{2x+4}{3} < 1$

$0 < 6\cdot\frac{1-x}{2} + 6\cdot\frac{2x+4}{3}$ $\qquad$ $6\cdot\frac{1-x}{2} + 6\cdot\frac{2x+4}{3} < 1\cdot 6$

$0 < 3(1-x) + 2(2x+4)$ $\qquad$ $3(1-x) + 2(2x+4) < 6$

$0 < 3-3x + 4x + 8$ $\qquad$ $3-3x + 4x + 8 < 6$

$x > -11$ $\qquad$ $x < -5$

Όπως είναι φανερό οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $-11 < x < -5$

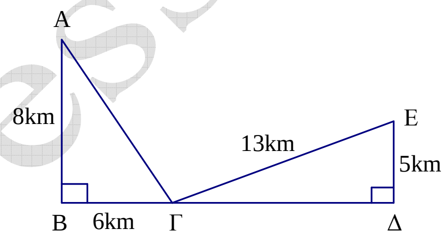
Αυτές είναι και οι ζητούμενες τιμές του x

23.

Δύο δρομείς ξεκινάνε ταυτόχρονα από το σημείο Α για να πάνε στο σημείο Ε, ο 1ος κάνοντας τη διαδρομή ΑΓΕ και ο 2ος την ΑΒΓΔΕ .

Ο 1ος τρέχει με ταχύτητα 15 km / h και ο δεύτερος με ταχύτητα 17 km / h .

Να υπολογίσετε ποιος από τους δρομείς θα φτάσει πρώτος στο Ε.



Προτεινόμενη λύση

Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ : $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ άρα

$ΑΓ = \sqrt{100} = 10km$

Πυθαγόρειο στο ΓΕΔ : $ΓΔ^2 = ΓΕ^2 - ΒΓ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$ άρα

$ΓΔ = \sqrt{144} = 12km$

Η διαδρομή του 1ου δρομέα είναι : ΑΓ + ΓΕ = 10 + 13 = 23 km

και του 2ου : ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ = 8 + 6 + 12 + 5 = 31km

Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι το διάστημα S που διανύεται σε χρόνο t με ταχύτητα υ δίνεται από τον τύπο $S = υ \cdot t$

Επομένως για τον 1ο δρομέα έχουμε $23 = 15t$ άρα $t = \frac{23}{15} \approx 1{,}53$ ώρες

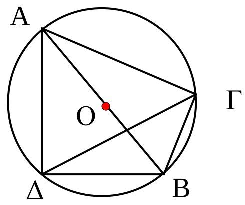
Και για τον 2ο δρομέα έχουμε $31 = 17t$ άρα $t = \frac{31}{17} \approx 1{,}82$ ώρες

Επειδή 1,82 > 1,53, ο πρώτος δρομέας θα φτάσει πρώτος στο Ε.

24.

Στο διπλανό σχήμα, είναι ΑΒ διάμετρος του κύκλου ,

$A\hat{B}\Delta = 50^o$ και $\overset{\frown}{\Delta B} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{A\Gamma}$



α) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ

β) Να δείξτε ότι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$

γ) Αν η χορδή ΒΓ έχει μήκος 3cm να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του.

Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή η ΑΒ είναι διάμετρος, οι γωνίες $A\hat{\Delta}B$ και $A\hat{\Gamma}B$ είναι ορθές ως εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο.

$A\hat{B}\Delta = 50^o$ άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = 100^o$ οπότε $\overset{\frown}{\Delta B} = 180^o - 100^o = 80^o$

Αφού $\overset{\frown}{\Delta B} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{A\Gamma}$ έχουμε $80^o = \frac{2}{3}\overset{\frown}{A\Gamma}$ άρα $\overset{\frown}{A\Gamma} = \frac{3}{2}\cdot 80 = 120^o$

Οπότε $\overset{\frown}{B\Gamma} = 180^o - 120^o = 60^o$

Η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta A\Gamma}$ για το οποίο ισχύει $\overset{\frown}{\Delta A\Gamma} = \overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{A\Gamma} = 100^o + 120^o = 220^o$.

Επομένως $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^o$

Επίσης η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta B\Gamma}$, για το οποίο ισχύει $\overset{\frown}{\Delta B\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta B} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 80^o + 60^o = 140^o$.

Επομένως $\Delta\hat{A}\Gamma = 70^o$

β)

Επειδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = 120^o$, θα είναι $A\hat{B}\Gamma = 60^o$

γ)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $συνA\hat{B}\Gamma = \frac{B\Gamma}{AB}$ άρα

$$συν60^o = \frac{3}{AB}$$

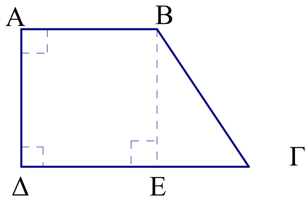
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{AB} \quad \text{συνεπώς} \quad AB = 6$$

Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι ρ = 3 και το μήκος του

$$L = 2\pi\rho = 2\cdot 3{,}14\cdot 3 = 18{,}84 \text{ cm}$$

25.

Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ΔΓ= 14 cm και ΑΒ = 9cm. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΕΔ είναι 108cm^2.



Του τραπεζίου να υπολογίσετε :

α) Το ύψος

β) Το εμβαδόν

γ) Την περίμετρο

Προτεινόμενη λύση

α)

(ΑΒΕΔ) = ΑΒ·ΑΔ άρα 108 = 9ΑΔ συνεπώς ΑΔ = 12 cm

β)

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{(\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ})\text{ΑΔ}}{2} = \frac{(9+14)12}{2} = 138\text{cm}^2$$

γ)

Είναι φανερό ότι ΔΕ = ΑΒ = 9cm και ΒΕ = ΑΔ = 12cm

Επίσης ΕΓ = ΔΓ – ΔΕ = 14 – 9 = 5cm

Πυθαγόρειο στο ΒΕΓ : $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΒΕ}^2 + \text{ΕΓ}^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ άρα

$\text{ΒΓ} = \sqrt{169} = 13\text{cm}$

Οπότε η περίμετρος Π του τραπεζίου είναι Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ =

= 9 + 13 + 14 + 12 = 48cm

26.

Η αντοχή μιας γέφυρας είναι 8 τόνοι. Ένα φορτηγό βάρους 3 τόνων είναι φορτωμένο με σωλήνες που ο κάθε ένας ζυγίζει 200 κιλά. Να βρείτε πόσους το πολύ σωλήνες μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό για να περάσει με ασφάλεια τη γέφυρα.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι μπορεί να μεταφέρει x το πολύ σωλήνες.

Τότε το βάρος των σωλήνων είναι 200x κιλά, ενώ το βάρος του φορτηγού είναι 3 τόνοι = 3000 κιλά.

Επομένως το συνολικό βάρος του αυτοκινήτου είναι 200x + 3000 κιλά .

Η αντοχή της γέφυρας είναι 8 τόνοι = 8000κιλά

Για να αντέξει η γέφυρα πρέπει $200x + 3000 \leq 8000$ άρα

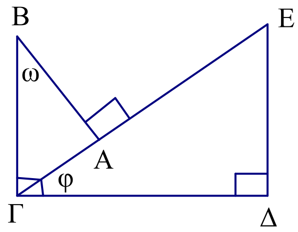
$200x \leq 5000$

$x \leq 25$

Δηλαδή το φορτηγό μπορεί να μεταφέρει το πολύ 25 σωλήνες

27.

Στο διπλανό σχήμα είναι $ΓΔ = 8$, $ΔΕ = 6$, $ΑΕ$, $= 7$, $ΑΒ = 4$



α) Δείξτε ότι οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ είναι ίσες .

β) Να βρείτε την πλευρά ενός τετραγώνου, του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν του πολυγώνου ΒΓΔΕΑ

Προτεινόμενη λύση

α)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΕ είναι $εφφ = \frac{ΔΕ}{ΓΔ} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ **(1)**

Από Πυθαγόρειο έχουμε $ΓΕ^2 = ΓΔ^2 + ΔΕ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

άρα $ΓΕ = \sqrt{100} = 10$

Τότε $ΓΑ = ΓΕ – ΑΕ = 10 – 7 = 3$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{3}{4}$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $εφω = εφφ$ άρα $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$

β)

$$(ΒΓΔΕΑ) = (ΑΒΓ) + (ΓΔΕ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΑΓ + \frac{1}{2} ΓΔ \cdot ΔΕ =$$

$$= \frac{1}{2} 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} 8 \cdot 6 = 6 + 24 = 30$$

Αν x είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου τότε πρέπει $x^2 = 30$ άρα $x = \sqrt{30}$

28.

α) Οι βαθμοί στα μαθηματικά 15 μαθητών της Β ΄ τάξης ενός γυμνασίου είναι

12, 14, 20, 14, 15, 17, 19, 12, 16, 20 , 18, 13, 20, 18, 18,

Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των τιμών αυτών

β) Τα έτη υπηρεσίας 204 υπαλλήλων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Έτη υπηρεσίας	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	Σύνολο
Αριθ. υπαλλήλων	80	44	32	20	16	8	4	204

Να βρείτε τη μέση τιμή των ετών υπηρεσίας των υπαλλήλων

Προτεινόμενη λύση

α)

Το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι

12 + 14 + 20 + 14 + 15 + 17 + 19 + 12 + 16 + 20 + 18 + 13 + 20 + 18 + 18 = 246

Οπότε μέση τιμή = $\frac{246}{15} = 16{,}4$

Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά

12 , 12 , 13, 14, 14 , 15, 16, 17, 18, 18, 18 , 19, 20, 20 , 20

Μεσαία παρατήρηση είναι η $8^{η}$ της οποίας η τιμή είναι 17.

Άρα διάμεσος = 17

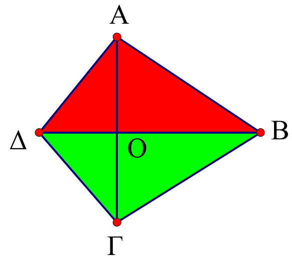
β)

Με βάση τα δεδομένα έχουμε τον πίνακα

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα	(κέντρο κλάσης)·(συχνότητα)
0-5	2,5	80	200
5-10	7,5	44	330
10-15	12,5	32	400
15-20	17,5	20	350
20-25	22,5	16	360
25-30	27,5	8	220
30-35	32,5	4	130
Σύνολο		204	1990

Επομένως η μέση τιμή είναι $\frac{1990}{204} \approx 9{,}75$ έτη

29.



Στο διπλανό διακοσμητικό, το κόκκινο χαρτί στοιχίζει 30 € το τετραγωνικό μέτρο και το πράσινο 34,8 € το τετραγωνικό μέτρο. Το στήριγμα ΔΒ στοιχίζει 3,5 € το μέτρο, το στήριγμα ΑΓ 4,20 € το μέτρο και το στήριγμα κατασκευής της περιμέτρου 6,2 € το μέτρο. Αν ΔΟ = 3dm, ΑΔ = 5dm ΟΓ = 4dm, ΒΓ = 15dm και $\sqrt{209} = 14,4$, να υπολογίσετε το κόστος κατασκευής του διακοσμητικού.

Προτεινόμενη λύση

Πυθαγόρειο στο ΑΔΟ : $ΑΟ^2 = ΑΔ^2 - ΔΟ^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

άρα $ΑΟ = \sqrt{16} = 4$ dm

Πυθαγόρειο στο ΓΔΟ : $ΔΓ^2 = ΟΔ^2 + ΓΟ^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

άρα $ΔΓ = \sqrt{25} = 5$ dm

Πυθαγόρειο στο ΒΓΟ : $ΒΟ^2 = ΒΓ^2 - ΓΟ^2 = 15^2 - 4^2 = 225 - 16 = 209$

άρα $ΒΟ = \sqrt{209} = 14,4$ dm

Πυθαγόρειο στο ΑΒΟ : $ΑΒ^2 = ΑΟ^2 + ΒΟ^2 = 4^2 + (\sqrt{209})^2 = 16 + 209 = 225$

άρα $ΑΒ = \sqrt{225} = 15$ dm

Αλλά ΔΒ = ΔΟ + ΟΒ = 3 + 14,4 = 17,4 dm

Επομένως το **εμβαδόν του κόκκινου** χαρτιού είναι $(ΑΔΒ) = \frac{1}{2} ΔΒ \cdot ΑΟ =$

$= \frac{1}{2} \cdot 17,4 \cdot 4$

$= 34,8 \text{ dm}^2 = 34,8:100 \text{ m}^2$

$= \mathbf{0,348 \text{ m}^2}$

Οπότε το **κόστος του κόκκινου χαρτιού** είναι 0,348·30 = **10,44 €**

Το **εμβαδόν του πράσινου** χαρτιού είναι $(ΓΔΒ) = \frac{1}{2} ΔΒ \cdot ΓΟ = \frac{1}{2} \cdot 17,4 \cdot 4 =$

$= 34,8 \text{ dm}^2 = 34,8:100 \text{ m}^2 =$

$= \mathbf{0,348 \text{m}^2}$

Άρα το **κόστος του πράσινου χαρτιού** είναι 0,348·34,8 = 12,1104 ≈**12,11 €**

Το **στήριγμα ΔΒ έχει μήκος** 17,4dm = 17,4 :10 = **1,74 m**

Επομένως κόστος 1,74·3,5 = **5,95€**

Το **στήριγμα ΑΓ έχει μήκος** ΑΓ = ΑΟ + ΟΓ = 4 + 4 = 8 dm= 8 :10m = **0,8m**

Επομένως κόστος 0,8·4,20 = **3,36€**

Η περίμετρος **Π του διακοσμητικού έχει μήκος** Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ =

= 15 + 15 + 5 + 5 =

= 40dm =

= 40:10 = 4m

Επομένως κόστος 4·6,2 = **24,8€**

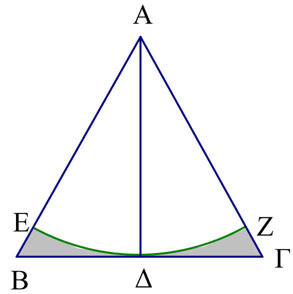
Το συνολικό κόστος είναι : 10,44 + 12,12 + 5,95 + 3,36 + 24,8 = 56,67€

30.

Το διπλανό τρίγωνο είναι ισόπλευρο με πλευρά α = 12 cm και το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Με κέντρο το Α και ακτίνα ρ = ΑΔ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε, Ζ. Να υπολογίσετε

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

β) Την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τριγώνου. Δίνεται ότι $\sqrt{108}=10{,}4$



Προτεινόμενη λύση

α)

Στο ισόπλευρο τρίγωνο το ύψος είναι και διάμεσος, επομένως ΒΔ = ΔΓ = 6cm

Πυθαγόρειο στο ΑΔΓ : $ΑΔ^2 = ΑΓ^2 - ΔΓ^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$

άρα $ΑΔ = \sqrt{108} = 10{,}4$ cm

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10{,}4 = 62{,}4\ cm^2$

β)

Επειδή $\hat{Α} = 60^o$ σαν γωνία ισοπλεύρου τριγώνου, το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΕΔΖ}$ είναι ίσο

με $\ell = 2\pi\rho \frac{\mu}{360} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10{,}4 \cdot \frac{60}{360} \approx 10{,}89$cm

Ακόμα ΕΒ = ΖΓ = $\alpha - \rho$ = 12–10,4 = 1,6cm

Η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου μέρους είναι $Π = ΒΓ + \ell + ΒΕ + ΖΓ =$

$= 12 + 10{,}89 + 1{,}6 + 1{,}6 =$

$= 26{,}09$ cm

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τριγώνου θα προκύψει αν από το εμβαδόν του τριγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα.

$Ε_{\text{κυκλικού τομέα}} = \frac{\pi\rho^2\mu}{360} = \frac{3{,}14 \cdot 10{,}4^2 \cdot 60}{360} \approx 56{,}60\ cm^2$ άρα

$Ε_{\text{ζητούμενο}} = 62{,}4 - 56{,}60 = 5{,}8\ cm^2$